508.　関数は代数的でなければ超越的である．それゆえ，ある曲線の方程式の中に超越関数の姿が見られるなら，その曲線は，その超越関数が存在するために超越曲線になる．代数方程式について言うと，代数方程式というものは，有理的であって整数以外の冪指数の姿が見えないか，あるいは非有理的ではあるが，そこに見られるのは分数冪指数のみであるかのいずれかである．後者の場合，方程式はつねに，前者の場合のような有理的な形に帰着される．曲線の方程式は座標 x と y の間の関係を表わすが，その方程式には，有理的ではなく，しかも有理的な形に帰着させることもできないという性質が備わっているとしよう．そのとき，その曲線は超越曲線である．もし方程式の中に，整数でも分数でもない冪指数をもつ冪が現われるなら，その方程式はいかなる仕方でも有理的な形に帰着させることはできない．したがって，そのような方程式で表される曲線は超越曲線である．こうして第一種の超越曲線，すなわち，もっとも単純な種類の超越曲線が生じる．そのような曲線の方程式には非有理的な冪指数が実際に姿を見せるのである．この種の方程式には対数も円弧も姿を見せず，ただ非有理数の概念の認識のみを元にして発生するから，第一種の超越曲線はどちらかといえばむしろ通常の幾何学の守備範囲に所属するようにも見える．そうしてまさしくこの状勢に論拠に求めて，このような曲線はライプニッツにより**内越的**(インターセンデンタル)という名で呼ばれたのである．代数的曲線と超越的曲線の真ん中あたりの位置を占めるというほどの意味合いである．

509.　方程式 $y = x^{\sqrt{2}}$ で表される曲線は超越的である．実際，この方程式のどれほど高次の冪を作っても，この方程式は決して有理的な形には還元されない．このような方程式を幾何学的な手法をもって作るのは不可能である．なぜなら，冪指数が有理数であるもの以外の冪は，幾何学的に明示することができないからである．このようなわけで，この種の曲線は代数的な曲線とは著しく異なっている．冪指数 $\sqrt{2}$ を単に近似的に提示したいのであれば，$\sqrt{2}$ の代わりに，値 $\sqrt{2}$ を近似的に表示する分数の系列

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{96}{70}$$

に所属する分数を用いるとよい．そのようにすると，探究したい曲線に接近していく第三目，第七目，第十七目，第四十一目・・・の代数曲線(3次，7次，17次，41次・・・の代数曲線)の系列が作られる．$\sqrt{2}$ は，無限に大きな数を分子と分母にもつ分数を用いるのではない限り，有理的に表示するのは不可能である．そのため，この方程式 $y = x^{\sqrt{2}}$ で表される曲線は無限に大きな位数をもつ線の目(もく)に入れなければならないことになり，まさしくそれゆえに代数曲線と見ることは許されないのである．これに加えて，$\sqrt{2}$ は二つの値を包含する．一方の値は正で，もう一方の値は負である．

この事情に起因して y はつねに二つの値を獲得し，二本の曲線が対をなして描かれることになる．

510.　次に，もしこの曲線を精密に描きたいというのであれば，対数の支援なしにこの作業を遂行するのは不可能である．実際，$y = x^{\sqrt{2}}$ として対数を取ると，$\log y = \sqrt{2} \log x$ となるから，切除線の対数に $\sqrt{2}$ を乗じると向軸線の対数が与えられることになる．そこで対数表を使えば，任意の切除線 x に対して，対応する向軸線が指定される．たとえば $x = 0$ なら $y = 0$ となる．$x = 1$ なら $y = 1$ となる．これらの値は対数を取る前の元の方程式を見ればごく簡単に導かれる．ところが $x = 2$ なら $\log y = \sqrt{2} \log 2 = \sqrt{2} \cdot 0.3010300$．そうして $\sqrt{2} = 1.41421356$ より $\log y = 0.4257207$．したがって，近似的に $y = 2.665144$．$x = 10$ なら $\log y = 1.41421356$．よって $y = 25.954554$ となる．こんなふうにして個々の切除線に対して，対応する向軸線の数値が算出され，曲線が描かれる．ただしこれは切除線 x に正の値が割り当てられるときの話である．そうではなくて切除線 x が負の値を取るなら，そのとき y の値が実になるか虚になるかを明言するのはむずかしい．たとえば $x = -1$ なら y の値は $(-1)^{\sqrt{2}}$ になるが，$\sqrt{2}$ の分数の系列による近似は何の助けにもならず，この値を規定するのは不可能である．

511.　虚の構成要素が入り込んでいる方程式は超越的な種類の方程式の仲間に繰り込むべきであり，これに疑いをはさむ理由はきわめてとぼしい．他方，虚の構成要素を内包する表示式が実の確定値をもたらすという事態は確かにありうる．このような現象の事例のいくつかは以前すでに姿を見せたことがあるから，ここでは一例を挙げれば十分である．それは，

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$$

という例である．この例では $x^{+\sqrt{-1}}$ と $x^{-\sqrt{-1}}$ のどちらも虚量だが，それにもかかわらず両者の和は実の値をもつのである．実際，$\log x = v$ としよう．e は，その双曲線対数(訳者註．自然対数ともいう)が 1 に等しい数とすると，$x = e^{v}$ となる．この値を x のところに代入すると，

$$2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$$

となる．ところで第138条(訳者註．『無限解析序説』第一巻の第138条)で見たように，

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = \cos v\,.$$

これより

$$y = \cos v = \cos \log x$$

となる．すなわち，x の任意の正の数値が提示されたとき，その双曲線対数を取れば，

半径 1 の円周上で，その対数値に等しい長さの弧が切り取られる．その弧の余弦を作ると，向軸線 y の値が与えられるのである．たとえば $x=2$ と取ると，

$$2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$$

となるが，このとき

$$y = \cos\log 2 = \cos 0.6931471805599$$

となる．ところで長さが 3.1415926535・・・に等しい弧のもとには 180° の大きさの角が広がっているから，黄金則(訳者註．ゴールデン・ルール＝比例の規則のこと)により，長さが $\log 2$ に等しい弧のもとには 39°, 42′, 51″, 52‴, 8⁗ の大きさの角が広がっていることがわかる．この角の余弦は 0.76923890136400 だが，この数値は切除線 $x=2$ に対応する向軸線 y の値を与えている．このような表示式には対数と円弧がともに現れれているから，正しく超越的表示式の仲間に数えられる．

512.　超越曲線の世界で先頭の位置を占めるのは，代数的量のほかに対数が含まれている方程式で表される曲線である．そのような曲線のうちでもっとも単純なのは，方程式

$$\log\frac{y}{a} = \frac{x}{b} \quad \text{すなわち} \quad x = b\log\frac{y}{a}$$

で表される曲線である．ここで，対数はどのような種類のものを採用しても同じことになる．というのは，定量 b を適切に選んで乗じることにより，あらゆる対数系は，ある同一の対数系に帰着されるからである．そこで文字 log は双曲線対数を表わすものとしよう．方程式 $x = b\log\frac{y}{a}$ で表される曲線は普通，**対数曲線**という名で知られている．e は，その対数が 1 になる数，すなわち $e = 2.718281828459045235360 28$ とすると，

$$e^{x:b} = \frac{y}{a} \quad \text{すなわち} \quad y = a\,e^{x:b}$$

となる．この方程式を見れば，対数曲線というものの性質がたやすく認識される．すなわち x のところに，あるアリトメチカ的数列に沿って並んでいく値を次々と代入すると，対応する向軸線 y の諸値はある幾何学的数列を作っていく．この構成の状況がいっそう簡明に目に見えるようにするために，

$$e = m^n \quad \text{および} \quad b = n\,c$$

と置くと，

$$y = a\,m^{x:c}$$

となる．ここで m は，1 よりも大きい任意の正の数を表わすものとしてよい．そこで

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c\cdots$$

とすると，

$$y = a\,,\ am\,,\ amm\,,\ am^3\,,\ am^4\,,\ am^5\,,\ am^6\ \cdots$$

となる．x に負の値を割り当てて，

$$x = -c\,,\ -2c\,,\ -3c\,,\ -4c\,,\ -5c\ \cdots$$

と置くと，

$$y = \frac{a}{m}\,,\ \frac{a}{mm}\,,\ \frac{a}{m^3}\,,\ \frac{a}{m^4}\,,\ \frac{a}{m^5}\ \cdots$$

となる．

513.　これより明らかなように(図101)，向軸線 y はいたるところで正の値をもち，しかも向軸線 x が正の方向に限りなく増大していくのにつれて，向軸線 y もまた無限に大きくなっていく．他方，向軸線 x が軸のもう一方の負の方向に沿って限りなく増大していくと，向軸線 y は無限に減少していく．したがって向軸線の軸は曲線の漸近線 Ap である．もう少し詳しく言うと，A を軸の原点に取ると，この点において向軸線 $AB = a$ となる．切除線 $AP = x$ を取ると，向軸線は

$$PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}$$

となる．したがって，

$$\log\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$$

となる．それゆえ，切除線 AP を定量 b で割ると，比 $\frac{PM}{AB}$ の対数が表わされることになる．切除線の始点を軸上の他の点 a に定めても，方程式は依然として類似の形を保持する．実際，$Aa = f$ として，$aP = t$ と置くと，$x = t - f$ により，

$$y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}$$

となる．定量 $a : e^{f:b}$ を g と等値すると，$y = ge^{t:b}$ となる．よって，$ab = g$ より，

$$\frac{aP}{b} = \log\frac{PM}{ab}$$

となることがわかる．そこで相互に距離 Pp だけ離れている二本の任意の向軸線 PM と pm を引くと，

$$\frac{Pp}{b} = \log\frac{PM}{pm}$$

となる．この関係式は定量 b に依存している．定量 b はさながら対数曲線のパラメータとでもいうような役割を果たしている．

514.　対数曲線上の任意の点における接線もまたたやすく規定される．実際，$Ap = x$ と置くと，$PM = ae^{x:b}$ となる．はじめに引いた向軸線との距離が $PQ = u$ だ

け離れた位置に，もう一本の向軸線 QN を引いて配置すると，

$$QN = a\,e^{(x+u):b} = a\,e^{x:b} \cdot e^{u:b}$$

となる．軸に平行に線分 ML を引くと，

$$LN = \left(QN - PM\right) = a\,e^{x:b}\left(e^{u:b} - 1\right).$$

点 M と N を通り，軸と点 T において交叉する直線 NMT を引くと，

$$LN : ML = PM : PT$$

となる．よって，

$$PT = u : \left(e^{u:b} - 1\right).$$

前に示したように，無限級数を用いて，

$$e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{uu}{2bb} + \frac{u^3}{6b^3} + \cdots$$

と表示される．したがって，

$$PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2bb} + \frac{uu}{6b^3} + \cdots}$$

となる．そこで間隔 $PQ = u$ を 0 にしてみよう．すると点 M と点 N は重なり合うから，直線 NMT は曲線の接線になる．接線影 PT は b に等しく，したがって定量である．これは対数曲線というものの際立った性質である．対数曲線のパラメータ b は同時に，いたるところで同じ大きさの定量をもつ接線影の長さでもあるのである．

515.　ここでひとつの問題が発生する．それは，こんなふうにしてはたして対数曲線の全体像が描かれるのか，あるいは双方向に無限に伸びていく分枝 MBm のほかにも，対数曲線は他の分枝をもつことはないのかどうかという問題である．実際，前にすでに目にしたように，二本の分枝が収斂していくことのない漸近線というものは存在しない．そこで対数曲線は，軸の両側に位置して，しかも類似の形をもつ二つの部分から作られていて，漸近線はダイアメータになると信じた人もいるのである．だが，方程式 $y = a\,e^{x:b}$ はこのような性質を決して語らない．実際，$\frac{x}{b}$ が整数もしくは奇分母をもつ分数のときは，向軸線 y はただひとつの実値，しかも正の値をもつ．しかしもし分数 $\frac{x}{b}$ が偶分母をもつとするなら，そのとき向軸線 y は二つの値を与える．ひとつは正の値であり，もうひとつは負の値である．よって，漸近線のもう一方の側にもこの曲線の点が存在する．それゆえ，対数曲線は漸近線の下方に無限に多くの離散点をもつことになる．それらの点は連続曲線を作らない．たとえ点と点との間隔が無限に小さいため，連続曲線かと惑わされるようなことがあるとしてもである．ところがこれは代数曲線には決して見られないパラドックスである．このパラドックスから，不思議さにおいて隔絶するもうひとつのパラドックスも生じる．実際，負の数の

対数は虚量であるから(このことについては，おのずから明らかであると言ってもいいし，$\log(-1)$ と $\sqrt{-1}$ の比が有限値をもつことによりわかると言ってもいい)，$\log(-n)$ は虚量である．これを i と等値しよう．ところで平方数の対数はその平方数の平方根の対数の二倍に等しいから，$\log(-n)^2 = \log n^2 = 2i$ となる．ところが $\log n\,n$ は実量で，$2\log n$ に等しい．すると実量 $\log n$ と虚量 i はどちらも実量 $\log n\,n$ の半分であることになってしまう．そのうえ任意の数は，その半分に等しい数を二つもつ．ひとつは実量であり，もうひとつは虚量である．同様に任意の数について，その三分の一に等しい量が三つ存在する．それらのうちひとつだけが実量である．また，任意の数について，その四分の一に等しい量が四つ存在する．それらのうちひとつだけが実量である．この状勢は以下も同様に続いていく．このパラドックスを通常の量の観念をもって解消するにはどのようにしたらよいのであろうか．この点は明瞭ではない．

516.　先ほど言い添えた事柄が承認されたなら，数 a の半分は $\frac{a}{2}+\log(-1)$ と $\frac{a}{2}$ であることが明らかになる．実際，前者の量の二倍は，

$$a + 2\log(-1) = a + \log(-1)^2 = a + \log 1 = a$$

となる．ここで，たとえ $\log(-1)=0$ ではないとしても，

$$+\log(-1) = -\log(-1)$$

であることに留意しなければならない．実際，$-1 = \frac{+1}{-1}$ であるから，

$$\log(-1) = \log(+1) - \log(-1) = -\log(-1)$$

となるのである．同様に，$\sqrt[3]{1}$ の値は 1 ばかりではなく $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ でもあるから，

$$3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \log 1 = 0$$

となる．したがって同一の量 a の三分の一は，

$$\frac{a}{3},\quad \frac{a}{3}+\log\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\quad \text{および}\quad \frac{a}{3}+\log\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

となる．実際，これらの各々の表示式を三倍すると同じ量 a が手に入るのである．この疑問をそのまま受け入ることはできそうにないが，これを解決する方向に向かうべく，もうひとつのパラドックスを報告しておかなければならない．すなわち，どの数にも無限に多くの対数が存在し，しかもそれらのうち実量であるものはひとつより多くは存在しないのである（註．対数の無限多価性はこの時点ではパラドックスと認識されていた）．たとえば 1 の対数は 0 に等しいが，それにもかかわらずそのほかにも 1 の虚の対数が無限に多く存在する．それらは

$$2\log(-1),\quad 3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\quad 4\log(-1)\quad \text{および}\quad 4\log\left(\pm\sqrt{-1}\right)$$

などである．これらのほかにも 1 の冪根を作ることにより与えられるものが無数に存在する．この命題は，これに先行する命題に比べてはるかにもっともらしい感じがあ

る．なぜなら，$x = \log a$ と置くと，$a = e^x$ となる．したがって

$$a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

となるが，これは無限次元の方程式であるから，x が無限に多くの根をもっても驚くほどのことはないのである．後者のパラドックスについてはこんなふうに解明がなされたが，それにもかかわらず前者のパラドックスのほうは依然としてその力を保持している．われわれは軸の下方において無数の離散点が対数曲線に所属することを示したが，この事実がある限り，前者のパラドックスはなお生きて働いているのである．

517.　ところでこのような無限に多くの離散点が存在することははるかに明白な一事であり，その様子は方程式 $y = (-1)^x$ を考察することにより明確に示される．実際，x が偶整数であるか，あるいは偶数の分子をもつ分数であれば，そのつど $y = 1$ となる．しかし，もし x が奇整数であるか，あるいは分子も分母も奇数の分数であるなら，$y = -1$ となる．そのほかのあらゆる場合，すなわち x は偶数の分母をもつ分数の場合や，あるいは非有理数の場合には，y の値は虚量である．それゆえ，方程式 $y = (-1)^x$ は軸の両側に，軸から距離 1 だけ離れた位置にある無限に多くの離散点をもたらすことになる．それらの点はどの二つも隣接しない．だが，それにもかかわらず，次に述べるような事態が妨げられるわけではない．すなわち，指定可能ないかなる量よりも小さな距離が与えられたとしても，その距離ほどの隔たりしかない二点が軸の同じ側に存在するのである．実際，切除線のどれほど近接する二つの値の間にも，分母が奇数である分数がひとつといわず無限に多く現われて，それらの各々から，提示された方程式に所属する点が生じる．これらの点は，軸に平行な，いずれも軸から距離 1 だけ離れたところに配置されている二本の直線上にのっている．これらの直線上には，方程式 $y = (-1)^x$ で表される点がひとつも配分されない区間，というよりもむしろそのような点が無限に多く配分されない区間は存在しえないのである．これと同じ変則的な事態は方程式 $y = (-a)^x$ でも起こるし，負の量の不定冪指数を作ることになる他の類似の方程式にも見られる．ともあれこの時点で必要だったのは，このような超越曲線にのみ起こりうるパラドックスを開示することであった．